

סטודנטים יקרים

לפניכם ספר תרגילים בקורס מתמטיקה בדידה. הספר הוא חלק מקורס חדשני וראשון מסוגו בארץ בנושא זה, המועבר ברשת האינטרנט On-line.

הקורס באתר כולל פתרונות מלאים לספר התרגילים, וכן את התיאוריה הרלוונטית לכל נושא ונושא.

הקורס כולו מוגש בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי, לדוגמה [לחצו כאן](#).

את הקורס בנה מר טל פלדמן, מרצה מבוקש במוסדות אקדמיים שונים ובעל ניסיון עתיר בהוראת המקצוע.

אז אם אתם עסוקים מידי בעבודה, סובלים מלקויות למידה, רוצים להצטיין או פשוט אוהבים ללמוד בשקט בבית, אנחנו מזמינים אתכם לחוויית לימודים יוצאת דופן וחדשה לחלוטין, היכנסו עכשיו לאתר www.gool.co.il.



אנו מאחלים לכם הצלחה מלאה בבחינות

צוות האתר GooL

גול זה בול. בשבילך!

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il

כתב ופתר - טל פלדמן ©

שיעורים פרטיים לבודדים ולקבוצות 054-7599493

תוכן

3	תרגילים בנושא לוגיקה
12	תרגילים בנושא קבוצות
16	תרגילים בנושא פונקציות
20	תרגילים ביחסים
25	תרגילים בקומבינטוריקה בסיסית
29	תרגילים בנושא זהויות קומבינטוריות והבינום של ניוטון
31	תרגילים בנושא הכלה והדחה
34	תרגילים בנושא פונקציות יוצרות
36	תרגילים בנושא רקורסיה
39	תרגילים בנושא שובך היונים

תרגילים בנושא לוגיקה

(1) רשום את טבלות האמת של הפסוקים הבאים:

$$\text{א. } (p \wedge q) \vee \neg r$$

$$\text{ב. } \neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg r)$$

$$\text{ג. } (p \wedge \neg q) \vee r$$

$$\text{ד. } (p \vee q) \rightarrow (q \rightarrow r)$$

(2) בטא את שלילת הפסוקים הבאים. (בלי קשר לנכונותם)

א. דוד יפה או ראובן מכוער

ב. האוכל חם וטעים

ג. לכל x קיים y שהוא השורש הריבועי של x

ד. כל תרנגולת כחולה עוזבת את הלול כדי להטיל ביצים.

ה. כל פנתר שהוא ורוד משחק בסרטים מצוירים.

ו. כל פנתר שהוא ורוד קוראים לו יוסי או שהוא משחק בסרטים מצוירים.

ז. כל פנתר שהוא ורוד קוראים לו יוסי וגם הוא משחק בסרטים מצוירים.

ח. לכל נגר קיים אדם שכל רהיטיו יוצרו בידי נגר זה.

ט. אם יהיה יום יפה וגם יהיה לי מצב רוח טוב אז אצא לטיול.

י. אם יהיה יום יפה אז אם יהיה לי מצב רוח טוב אז אצא לטיול.

(3) בדוק אלו מזוגות הפסוקים הבאים שקולים לוגית במקרה שהתשובה חיובית הראה זאת. הן בעזרת טבלת

אמת והן בעזרת עץ שקר

$$\text{א. } \neg(p \rightarrow q) \quad p \wedge (\neg q)$$

$$\text{ב. } (\neg p) \rightarrow q \quad p \vee (\neg q)$$

$$\text{ג. } p \rightarrow (\neg q) \quad \neg(p \wedge q)$$

$$\text{ד. } (p \vee q) \wedge (\neg q) \quad p \wedge (\neg q)$$

$$\text{ה. } p \leftrightarrow q \quad (p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q))$$

$$\text{ו. } (s \rightarrow (p \wedge (\neg r))) \wedge ((p \rightarrow (r \vee q)) \wedge s) \quad p \vee u$$

ז. הראה כי $\neg(r \wedge (p \vee q)) \equiv ((\neg p) \wedge (\neg q)) \vee \neg r$ בעזרת זהויות יסוד.

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il

כתב ופתר - טל פלדמן ©

שיעורים פרטיים לבוחדים ולקבוצות 054-7599493

4 א. הבע את קשר הגרירה בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge, \neg\}$

ב. הבע את קשר ה- \vee בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge, \neg\}$

ג. הבע את קשר ה- \oplus (XOR) בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge, \neg\}$

ד. הבע את קשר ה- \leftrightarrow בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge, \neg\}$

ה. הבע את קשר הגרירה בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee, \neg\}$

ו. הבע את הקשר \wedge בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee, \neg\}$

ז. הבע את קשר ה- \oplus (XOR) בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee, \neg\}$

ח. הבע את קשר ה- \leftrightarrow בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee, \neg\}$

$$\alpha_1 : (A \vee B) \rightarrow (D \rightarrow C)$$

$$\alpha_2 : B \rightarrow \neg(C \wedge A)$$

$$\alpha_3 : C \leftrightarrow (A \wedge D)$$

$$\beta : D \vee (B \wedge C)$$

בדקו אלו מהטענות הבאות נכונות והוכיחו.

5 יהיו $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ הפסוקים הבאים:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \Rightarrow \beta \quad \text{א.}$$

ב. β אינה נובעת טאוטולוגית מהפסוקים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ אך מתיישבת אתם.

ג. β אינה מתיישבת עם הפסוקים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ כלומר סותרת אתם.

6 הוכח כי הפסוקים הבאים הינם טאוטולוגיות ללא שימוש בטבלת אמת

$$\text{א. } p \vee (\neg p)$$

$$\text{ב. } p \vee (p \rightarrow q)$$

$$\text{ג. } (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)$$

$$\text{ד. } (p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$$

$$\text{ה. } ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

$$\text{ו. } ((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$$

$$\text{ז. } (q \vee p \vee r) \rightarrow ((\neg p) \rightarrow ((q \vee r) \wedge (\neg p)))$$

$$\text{ח. } ((B \rightarrow (C \wedge (\sim A))) \wedge (((\sim B) \vee C) \rightarrow D) \wedge (E \rightarrow (\sim D))) \rightarrow (A \rightarrow \sim E)$$

ט. הוכח בעזרת טבלת אמת שהפסוק $(u \rightarrow v) \leftrightarrow ((\neg v) \rightarrow (\neg u))$ הוא טאוטולוגיה.

י. הוכח כי הפסוק $(u \rightarrow v) \leftrightarrow ((\neg v) \rightarrow (\neg u)) \rightarrow (((p \rightarrow r) \wedge ((\neg q) \rightarrow p) \wedge (\neg r)) \rightarrow q)$ הוא טאוטולוגיה. (מותר לך להסתמך על הסעיף הקודם)

(7) בארץ חלם מתקיימת שביתת רופאים במטרה להגדיל את תקציב הבריאות. לפניך ניתוח המצב.

* אם הרופאים לא יסיימו את השביתה אז הנהלות בתי החולים יתערבו.

* אם לא תפגע בריאותם של החולים אז הממשלה לא תגדיל את הקציב.

* אם הנהלות בתי החולים יתערבו אז לא תפגע בריאותם של החולים או שבית המשפט יתערב.

* בית המשפט לא יתערב וגם הממשלה לא תגדיל את התקציב.

מסקנה: הרופאים יסיימו את השביתה.

נסמן: D הרופאים יסיימו את השביתה H הנהלות בתי החולים יתערבו. P בית המשפט יתערב

C לא תפגע בריאותם של החולים M הממשלה תגדיל את התקציב.

א. הצרן בעזרת המשתנים המוצעים את טיעון לשפת תחשיב הפסוקים.

ב. בדוק ללא שימוש בטבלת אמת אם הטענה תקף.

(8) בארץ חלם מתקיימות בחירות זרובבל, כתבינו לענייני מפלגות מנתח את המצב:

* אם אבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב את דני יפרוש.

* אם שמעון יציע לדני תפקיד אז דני יפרוש.

* אם בני ייבחר לראשות מפלגת פיתה אז שמעון יציע לדני תפקיד או שאבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב.

* בני יבחר לראשות מפלגת פיתה.

לכן מסיק כתבינו שדני יפרוש.

סמן: A אבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב. B בני יבחר לראשות מפלגת פיתה. C שמעון יציע לדני

תפקיד. D דני יפרוש.

הצרן את הטענה לשפת תחשיב הפסוקים והוכח כי המסקנה תקפה.

9) בפרס העתיקה מחליט היזם וייתא לבנות תיאטרון. אם רוצים שהתיאטרון נגיש לתושבים אז צריך להקימו בלב העיר. אם רוצים שהתיאטרון יהיה רווחי הוא צריך להיות גדול ומרווח כדי שיכיל הרבה אנשים. אבל אם התיאטרון יהיה גדול ומרווח ויבנה בלב העיר אז הוא יעלה 10 מליון זוזים פרסיים. אבל לוייתא היזם אין 10 מליון זוזים פרסיים לכן מסיק וייתא היזם כי התיאטרון יוקם במקום לא נגיש לתושבים או שלא יהיה גדול ומרווח.

א. תרגם את ניתוח המצב לשפת הפסוקים תוך שימוש בסימונים הבאים:

N נגיש לתושבים L בלב העיר Y יכיל הרבה אנשים G גדול ומרווח M מחירו יעלה על... R ריווחי

הצרן את ההנחות והמסקנה לשפת הפסוקים בדוק האם המסקנה תקפה ללא שימוש בטבלת אמת.

10) הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות. (כאשר p, q, r פסוקים אטומים)

$$א. (p \vee q) \Rightarrow p$$

$$ב. (p \vee q) \Rightarrow q$$

$$ג. (p \rightarrow q) \Rightarrow q$$

$$ד. p, p \rightarrow q \Rightarrow q$$

$$ה. (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge p \Rightarrow r$$

$$ו. r \Rightarrow (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge p$$

$$ז. A \rightarrow B, C \rightarrow B, D \rightarrow (A \vee C), D \Rightarrow B$$

$$ח. (A \vee B \rightarrow D), D \rightarrow (C \vee P), P \rightarrow Q, (\neg C) \wedge (\neg Q) \Rightarrow \neg A$$

$$ט. (B \rightarrow (C \wedge (\sim A))), ((\sim B) \vee C) \rightarrow D, (E \rightarrow (\sim D)) \models (A \rightarrow \sim E)$$

11) בסעיפים הבאים α, β, γ פסוקים לאו דווקא אטומים. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות.

$$א. אם α סתירה וגם $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$ אז $\beta \Rightarrow \neg \gamma$$$

$$ב. אם α טאוטולוגיה וגם $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$ אז $\neg \beta \Rightarrow \gamma$$$

$$ג. אם $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$ אז $((\alpha \Rightarrow \beta) \vee (\alpha \Rightarrow \gamma))$$$

$$ד. אם $((\alpha \Rightarrow \beta) \vee (\alpha \Rightarrow \gamma))$ אז $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$$$

$$ה. אם $\alpha \Rightarrow \beta \wedge \gamma$ אז $((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow \gamma))$$$

ו. אם $\alpha \Rightarrow \beta \wedge \gamma$ אז $((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow \gamma))$

ז. אם $(\alpha \rightarrow \beta) \Rightarrow \gamma$ אז $\alpha \Rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$

ח. אם $\alpha \Rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ אז $(\alpha \rightarrow \beta) \Rightarrow \gamma$

ט. אם $(\alpha \Rightarrow \gamma) \vee (\beta \Rightarrow \gamma)$ אז $\alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma$

י. אם $\alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma$ אז $(\alpha \Rightarrow \gamma) \vee (\beta \Rightarrow \gamma)$

יא. אם $\alpha, \beta \models \gamma$ אז $\alpha \models \beta \rightarrow \gamma$

יב. אם $\alpha \vee \beta \models \gamma$ אז $\alpha \models \beta \rightarrow \gamma$

12) עבור α פסוק אטומי או מורכב נגדיר את הקבוצה $F_\alpha = \{\gamma \mid \alpha \Rightarrow \gamma\}$ כלומר F_α היא קבוצת כל הפסוקים

שנובעים טאוטולוגית מהפסוק α . הוכח כי $\alpha \equiv \beta$ אם ורק אם $F_\alpha = F_\beta$.

13) לכל אחת מהטענות הבאות קבע האם היא נכונה ורשום את שלילתה ללא שימוש בקשר השלילה. במקרה

שהטענה נכונה נמק זאת ובמקרה שהטענה אינה נכונה הבא דוגמה נגדית.

א. $\forall x \in \mathbb{N} (\exists y \in \mathbb{N} (x < y))$

ב. $\forall x \in \mathbb{N} (\exists y \in \mathbb{N} (x > y))$

ג. $\forall x, y \in \mathbb{R} (x > y) \rightarrow \exists z \in \mathbb{R} (x > y + z)$

ד. $\forall x \in \mathbb{R} (x > 0) \rightarrow (\exists n \in \mathbb{N} (x > \frac{1}{n}))$

ה. $\forall x \in \mathbb{R} (x \neq 0 \rightarrow \forall y \in \mathbb{Z} \exists z \in \mathbb{R} (xz = y))$

ו. $\forall x \in \mathbb{N} (x \geq 1 \rightarrow \forall y \in \mathbb{N} \exists z \in \mathbb{N} (xz = y))$

ז. $\forall x \in \mathbb{R} (x > 0 \rightarrow \exists y \in \mathbb{N} (xy > 1))$

ח. $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} (xy = x \wedge x + y < 5) \rightarrow y < 4\frac{1}{2}$

ט. $\forall x \in \mathbb{R} ((x > 0) \rightarrow \forall y \in \mathbb{R} (\exists n \in \mathbb{N} (nx > y)))$

14) הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות. במקרה של הפרכה הדגם עולם דיון מתאים עבורו הטענה לא מתקיימת והסבר מדוע הטענה לא מתקיימת. כמו כן רשום גם את שלילה של כל טענה כאשר הקשר \neg

מופיע רק לצד פרדיקטים

א. $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$

ב. $\exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$

ג. $(\forall x (P(x) \wedge Q(x))) \rightarrow (\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x))$

ד. $(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \rightarrow (\forall x (P(x) \wedge Q(x)))$

ה. $(\forall x (P(x) \vee Q(x))) \rightarrow (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))$

ו. $(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)) \rightarrow (\forall x (P(x) \vee Q(x)))$

ז. $(\exists x (P(x) \wedge Q(x))) \rightarrow (\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x))$

ח. $(\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)) \rightarrow (\exists x (P(x) \wedge Q(x)))$

ט. $(\exists x (P(x) \vee Q(x))) \rightarrow (\exists x P(x) \vee \exists x Q(x))$

י. $(\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)) \rightarrow (\exists x (P(x) \vee Q(x)))$

בעולם הדיון \mathbb{Z} . הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות.

$$P(x): x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$Q(x): x \text{ is odd}$$

$$R(x): x > 0$$

$$L(x): x^2 + 2x + 2 = 0$$

15) נסמן

א. $\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)]$

ב. $\forall x [Q(x) \rightarrow P(x)]$

ג. $\exists x [P(x) \rightarrow Q(x)]$

ד. $\exists x [Q(x) \rightarrow P(x)]$

ה. $\forall x [L(x) \rightarrow Q(x)]$

ו. $\exists x [L(x) \rightarrow Q(x)]$

ז. $\exists x [R(x) \rightarrow P(x)]$

$$\text{ח. } \forall x(\neg Q(x) \rightarrow \neg P(x))$$

$$\text{ט. } \forall x[(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow R(x)]$$

$$\text{י. } \exists x[P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x))]$$

$$\text{יא. } \forall x[P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x))]$$

נפנה עתה למספר שאלות בהצרנות. בכל השאלות מותר להשתמש ב- סימני משתנים: x, y, z סימני קבוצה: $A, B, C, \dots, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ סוגריים, קשרים, כמתים ופרדיקטים: $, \in, \subseteq, =, \neq, \forall, \exists, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,), >, <$ וכן סימנים נוספים הנתונים בגף השאלה.

שימו לב: אסור להשתמש בקשר השלילה ואין להשתמש בסימן \notin !!!

(16) הצרן כל אחת מהטענות הבאות.

- א. לכל מספר ממשי אין עוקב מידי. הכוונה שאין מספר ראשון מייד אחריו.
- ב. אין קבוצה שמכילה את כל הקבוצות. מותר כאן להשתמש בסימן \notin .
- ג. לכל מספר שאינו ראשוני יש לפחות שני מחלקים שונים. כאן גם מותר להשתמש בסימן קבוצה P עבור קבוצת המספרים הראשוניים ובסימן \notin .
- ד. למספר הטבעי הכי גדול אין מחלקים. (ברור שאין כזה אבל צריך רק להצדיק.)
- ה. לא כל מספר טבעי הוא ראשוני.
- ו. כל קבוצה אינה שקולה לקבוצת החזקה שלה.
- ז. לכל שני מספרים טבעיים שונים יש מחלק משותף.
- ח. בכל קבוצה בת לפחות שלושה איברים שונים אין איבר מקסימלי.
- ט. לא בכל תת קבוצה של ממשים יש איבר מינימלי
- י. תהי פונקציה $f: X \rightarrow Y$. נגדיר את הפונקציה $G: P(X) \rightarrow P(Y)$ באופן הבא:

$$G(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

הצרין את הטענה: אם f על אז G ח.ח.ע.

השתמשי רק בסימנים הבאים:

סימני משתנים: x, y, B, C סימני קבוצות: X, Y סימן פונקציה: f

סוגריים, קשרים, כמתים ופרדיקטים: $, \in, =, \neq, \forall, \exists, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,), \subseteq$,

שימו לב: אסור להשתמש בסימנים G ו P . יש להשתמש בהגדרותיהם כדי להחליפם

בסימנים אחרים.

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il

כתב ופתר - טל פלדמן ©

שיעורים פרטיים לבודדים ולקבוצות 054-7599493

יא. לכל מספר ממשי יש לכל היותר שני מספרים ממשיים שונים זה מזה שריבועם שווה לו.

יב. הצרינו את הטענה: לכל פונקציה $f: A \rightarrow B$ לכל פונקציה $g: B \rightarrow A$ אם $g \circ f = Id_A$ אז f היא על.

מותר להשתמש בסימנים הבאים ורק בהם. סימני משתנים x_1, x_2, \dots קשרים $\rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee$

והסימנים $\exists, \forall, (,), \in, A^B, B^A, f, g$ ולמען הסר ספק אסור להשתמש ב- d_A ואסור ב- \circ

יג. מספר ראשוני הוא מספר טבעי גדול מאחד שמחלקיו היחידים הם הוא עצמו ו-1. הצרינו א הטענה הבאה:

לכל מספר טבעי, בתחום שבין המספר עצמו לפעמיים המספר (כולל קצוות) יש לפחות מספר ראשוני אחד.

מותר להשתמש אך ורק בסימנים הבאים: סימני משתנים x_1, x_2, \dots קשרים $\leftrightarrow, \rightarrow, \wedge, \vee$

והסימנים $\exists, \forall, (,), \in, \mathbb{N}, \leq, 1, 2, 3, \dots, =, |$ פירושו מחלק.

יד. הצרינו את הטענה הבאה: בקבוצה A יש לכל היותר שני מספרים טבעיים. השתמשו רק בסימנים הבאים:

סימני משתנים x, y, z סימני קבוצות A, \mathbb{N} וכן סוגריים, קשרים, כמתים, ופרדיקטים:

$\exists, \forall, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,), \in, \notin, \neq, =$

טו. הצרינו את הטענה לא תמיד נכון שאם $A \subseteq B$ אז $A \sim B$

מותר להשתמש רק בסימנים הבאים: סימני קבוצות A, B (מותר לצרף אותם לקבוצה בחזקת קבוצה)

סוגריים, קשרים, כמתים, ופרדיקטים: $\exists, \forall, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,), \in, \neq, =$ אין להשתמש בקשר השלילה

טז. הצרינו את הטענה הבאה: קבוצת הפונקציות החח"ע מהממשיים לטבעיים אינה ריקה.

השתמשו רק בסימנים הבאים: סימני משתנים x, y סימני קבוצות \mathbb{R}, \mathbb{N} (וצרופי חזקות שלהן)

סימני פונקציות f, g סוגריים, קשרים, וכמתים: $\exists, \forall, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,), \{, \}, \in, \neq, =$

יז. הצרינו את כלל הכפל של אי שוויון ממשי (קטן או שווה) במספר ממשי שונה מאפס.

מותר להשתמש אך ורק בסימנים הבאים: סימני משתנים x_1, x_2, \dots קשרים $\leftrightarrow, \rightarrow, \wedge, \vee$

והסימנים $\forall, (,), \in, \mathbb{R}, \leq, 0$ דוגמה לכלל הזה היא: מאי השוויון $3.14 \leq \pi$ (ע"י כפל במינוס

חצי לקבל את אי השוויון $-0.5\pi \leq -1.57$.)

(17) נתונה הקבוצה $\{x \in \mathbb{R} \mid \forall y \left[(y \in \{t \in \mathbb{N} \mid t > 3\} \rightarrow (y > x)) \right]\}$ כתוב אותה בצורה $\{x \in \mathbb{R} \mid \dots\}$ כך

שבאגף ימין לא יופיע אף משתנה חוץ מ- x .

(18) תאר במדויק את הקבוצה: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{N} (x = y^2) \rightarrow (x > 2)\} - \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1\}$

(19) הוכח כי ההנחה A גוררת טאוטולוגית את המסקנה $\neg(\neg A)$ בעזרת כללי ההיסק הבאים:

$$\Rightarrow p \rightarrow p \quad (1)$$

$$p \Rightarrow q \rightarrow p \quad (2)$$

$$p \rightarrow q, p \rightarrow (\neg q) \Rightarrow \neg p \quad (3)$$

את המסקנה A מותר להשתמש רק בכללי ההיסק הבאים:

$$B \vee D$$

$$C \rightarrow B$$

$$D \rightarrow (A \vee C)$$

$$\neg B$$

(20) הוכח בעזרת ההנחות

$$P \Rightarrow Q \vee P$$

$$P \wedge Q \Rightarrow P$$

$$P \wedge Q \Rightarrow Q$$

$$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$$

$$P, P \rightarrow Q \Rightarrow Q$$

$$\neg P, P \vee Q \Rightarrow Q$$

$$P \Rightarrow \neg\neg P$$

$$P \rightarrow Q \Rightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$$

תרגילים בנושא קבוצות

(1) לכל אחת מהטענות הבאות, אם הטענה נכונה אז ציין רק שהטענה נכונה ואם הטענה אינה נכונה אז ציין שהטענה לא נכונה ותן דוגמה נגדית והראה כי הדוגמה שנתת באמת מהווה דוגמה נגדית. ערך רב יותר יש לדוגמה מינימלית. (בדוק האם בדוגמה שנתת יש פרטים מיותרים והסר אותם).
את הטענות הנכונות מבין 10-17 נסה להוכיח. רצוי להוכיח גם את טענה 9) בה נשתמש יותר מאוחר להוכחת תכונות של קבוצת הזקה

(א) אם $x \notin A$ אז $x \notin A \cup B$.

(ב) אם $x \notin A \cup B$ אז $x \notin A$

(ג) אם $x \notin A$ אז $x \notin A \cap B$.

(ד) אם $x \notin A \cap B$ אז $x \notin A$

(ה) אם $x \notin A$ אז $x \notin A - B$

(ו) אם $x \notin A - B$ אז $x \notin A$

(ז) אם $x \in B$ אז $x \notin A - B$.

(ח) אם $x \notin A - B$ אז $x \in B$

(ט) $(A \subseteq B \wedge A \subseteq C) \Leftrightarrow A \subseteq B \cap C$

(י) $(A \subseteq B \vee A \subseteq C) \Leftrightarrow A \subseteq B \cup C$

(יא) אם $A = A \cup B$ אז $A \subseteq B$

(יב) אם $A = A \cup B$ אז $B \subseteq A$

(יג) אם $A = A \cap B$ אז $A \subseteq B$

(יד) אם $A = A \cap B$ אז $B \subseteq A$

(טו) אם $A \subseteq B$ אז $A = A \cup B$

(טז) אם $B \subseteq A$ אז $A = A \cup B$ (יז)

$$(יז) \text{ אם } A \subseteq B \text{ אז } A = A \cap B$$

$$(יח) \text{ אם } B \subseteq A \text{ אז } A = A \cap B$$

$$(יט) \text{ } x \notin A \Leftrightarrow x \notin A - B$$

$$(כ) \text{ } x \in B \Leftrightarrow x \notin A - B$$

$$(כא) \text{ השלם } \Leftrightarrow x \notin A - B$$

(2) יהיו A, B, C קבוצות הוכח או הפרך כ"א מהטענות הבאות.

$$(א) \text{ אם } A = A - B \text{ אז } B = \emptyset$$

$$(ב) \text{ אם } A = A - B \text{ אז } A \cap B = \emptyset$$

$$(ג) \text{ אם } A = A \cup B \text{ אז } A \cap B = B$$

$$(ד) \text{ אם } B = A \cup B \text{ אז } A \cap B = B$$

$$(ה) \text{ אם } A \cap B = A \text{ אז } A = A \cup B$$

$$(ו) \text{ אם } A \cap B = B \text{ אז } A = A \cup B$$

(ז) אם $A \cup B = A \cup C$ וגם $A \cap B = A \cap C$ אז $B = C$. (מבחן סמסטר קיץ תשס"ח, מועד ב')

$$(ח) \text{ } A \cup (B - C) = (A \cup B) - C$$

$$(ט) \text{ } A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cap C)$$

$$(י) \text{ } (A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$$

$$(יא) \text{ } (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$$

$$(יב) \text{ } A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$

$$(יג) \text{ } (A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$$

$$(יד) \text{ א. } A \cap B \cap C \subseteq A \oplus B \oplus C$$

$$\text{ב. } A \oplus B \oplus C \subseteq A \cap B \cap C$$

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il

כתב ופתר - טל פלדמן ©

שיעורים פרטיים לבוחדים ולקבוצות 054-7599493

(3) הוכח כל אחת מהטענות הבאות בדרך השלילה.

במקום הטענה אם α אז β מוכיחים אם $\neg\beta$ אז $\neg\alpha$.

ויש לזכור תמיד שלהנחת השלילה $\neg\beta$ ולכל הנובע ממנה מתייחסים כנתון.

(א) אם $A \cap C = \emptyset$ אז $A - (B - C) \subseteq (A - B) - C$

(ב) אם $A \subseteq B$ אז $(A - C) \cup (C - B) \subseteq A \cap B$

(ג) אם $(A - C) \cap B = \emptyset$ אז $(A \cup B) - C \subseteq A - B$

(ד) אם $B \subseteq A$ אז $(C - A) \cup (B - C) \subseteq A - B$

(ה) אם $A \subseteq A \Delta B$ וגם $B - C = B \Delta C$ אז $A \cap C = \emptyset$.

(ו) אם $A \subseteq A \oplus B$ וגם $B - C \subseteq B \oplus C$ אז $A \cap C = \emptyset$

ועכשיו קצת על קבוצת חזקה.

(4) הוכח או הפרך כ"א מהטענות הבאות.

(א) $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$

(ב) $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

(ג) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

(ד) $P(A) \cap A \neq \emptyset$

(ה) $P(A) \cap A = \emptyset$

(ו) אם $\{A\} \subseteq P(B)$ אז $P(A) \subseteq P(B)$

את שתי הטענות הבאות הוכח בדרך השלילה

(ז) אם $A \cap B = \emptyset$ אז $P(A) \subseteq P(A - B)$

(ה) אם $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ אז $(A \subseteq B) \vee (B \subseteq A)$ (שאלה קשה).

(5) משהו גם על מכפלות קרטזיות. (נצטרך את זה גם ליחסים)

$$(A = B) \Leftrightarrow (A \times A = B \times B) \quad (\text{א})$$

$$((B = \emptyset) \vee (A = \emptyset) \vee (A = B)) \Leftrightarrow (A \times B = B \times A) \quad (\text{ב})$$

(ג) הוכח כי לכל 4 קבוצות A, B, C, D מתקיים: $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

(ד) אם $((A \times A) \cup (B \times B) = (C \times C))$ אז $((B \subseteq A) \vee (A \subseteq B)) \wedge (A \cup B \subseteq C)$

(ה) הוכח כי לכל 4 קבוצות A, B, C, D מתקיים: $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

(6) הוכיחו או הפריכו: תהיינה A, B שתי קבוצות כלשהן ותהי $S \subseteq A \times B$ אז קיימות $C \subseteq A$

$$S = C \times D \text{ -ש- } D \subseteq B \text{ -ו-}$$

(7) הוכיחו או הפריכו: לכל שתי קבוצות A, B מתקיים: $\overline{A \oplus B} = \overline{A} \oplus \overline{B}$

(8) הוכיחו או הפריכו: קיימות שלוש קבוצות A, B, C שלושתן לא ריקות ושונות זו מזו

$$A \cup (B - C) \subseteq A \cap (B - C) \text{ -ש-}$$

(9) תהיינה A, B, C קבוצות כלשהן. נתון $P(A) - P(B) = P(B) - \{\emptyset\}$ הוכח כי $B - A = B$

(10) הוכח כי אם $A \Delta B \subseteq A \Delta C$ אז $A \cap C \subseteq B$

(11) הוכח או הפרך: קיימות שתי קבוצות A, B כך ש- $|A \times B| = 24$ וגם $|A \cap B| = 5$

(12) תהיינה A, B, C קבוצות כלשהן. נתון $A \cap B = \emptyset$ הוכח כי $(A \Delta C) \cup (B \Delta C) = A \cup B \cup C$

(13) הוכח או הפרך: לכל שלוש קבוצות A, B, C $A \times (B \oplus C) = (A \times B) \oplus (A \times C)$

(14) תן דוגמא לקבוצה A שמקיימת $A \cap P(A) \cap P(P(A)) \neq \emptyset$

(15) לכל שלוש קבוצות A, B, C מתקיים: $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus (C \setminus B))$

תרגילים בנושא פונקציות

(1) (חימום)

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & \text{אם } n \text{ אי זוגי} \\ n-1 & \text{אם } n \text{ זוגי} \end{cases}$$

יהיו f ו- g הפונקציות מ- \mathbb{N} ל- \mathbb{N} המוגדרות כך:

$$g(n) = 2n - 1, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{לכל}$$

הוכח או הפרך כל אחת מן הטענות הבאות:

I. f היא חד-חד-ערכיתII. g היא חד-חד-ערכיתIII. f היא על \mathbb{N} IV. g היא על \mathbb{N} V. $f \circ g$ היא פונקצית הזהות על \mathbb{N} VI. $g \circ f$ היא פונקצית הזהות על \mathbb{N}

(2) לגבי כל אחת מהפונק' הבאות קבע האם היא חח"ע והאם היא על. נמק.

$$א. f_1(x) = \frac{2x}{x+3}, \quad f_1: (0, \infty) \rightarrow (0, 2)$$

$$ב. f_2(x) = x + \frac{1}{x}, \quad f_2: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$$

$$ג. f_3(x) = x - \frac{1}{x}, \quad f_3: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$ד. f_4(X) = X \cap \mathbb{Z}, \quad f_4: P(\mathbb{R}) \rightarrow P(\mathbb{R})$$

$$ה. f_5(X) = X \cap \mathbb{Z}, \quad f_5: P(\mathbb{R}) \rightarrow P(\mathbb{Z})$$

$$ו. f_7(X) = X \Delta \mathbb{Z}, \quad f_7: P(\mathbb{R}) \rightarrow P(\mathbb{R})$$

$$ז. f_8(n) = \text{the sum of the digits of } n, \quad f_8: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

(3) יהי $f: B \rightarrow C, g: A \rightarrow B$ שתי פונקציות (כמובן שבתנאים אלו $f \circ g: A \rightarrow C$) הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות (במקרה של הפרכה בחר $A = B = C = \mathbb{N}$)

- א. אם f חח"ע וגם g חח"ע אז $f \circ g$ חח"ע.
- ב. אם $f \circ g$ חח"ע אז f חח"ע.
- ג. אם $f \circ g$ חח"ע אז g חח"ע.
- ד. אם f על וגם g על אז $f \circ g$ על.
- ה. אם $f \circ g$ על אז f על.
- ו. אם $f \circ g$ על אז g על.
- ז. אם $f \circ g$ חח"ע וגם g על אז f חח"ע.
- ח. אם $f \circ g$ על וגם f חח"ע אז g על.
- ט. אם f לא חח"ע וגם g לא על אז $f \circ g$ לא חח"ע או $f \circ g$ לא על.

(4) תהי A קבוצה כלשהי ותהיינה $f, g, h: A \rightarrow A$ הוכח או הפרך כ"א מהטענות הבאות.

- א. אם $g \circ f = h \circ f$ אז $g = h$.
- ב. אם $g \circ f = h \circ f$ וגם f על אז $g = h$.
- ג. אם $g \circ f = h \circ f$ וגם f חח"ע אז $g = h$.
- ד. אם $f \circ g = f \circ h$ אז $g = h$.
- ה. אם $f \circ g = f \circ h$ וגם f חח"ע אז $g = h$.
- ו. אם $f \circ g = f \circ h$ וגם f על אז $g = h$.

(5) נתונות פונקציה $f: A \rightarrow B$ וקבוצות $C, D \subseteq A$.

- א. הוכח כי $f(C \cap D) \subseteq f(C) \cap f(D)$.
- ב. הוכח שאם f היא חד-חד-ערכית אז $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$.
- ג. הדגם קבוצות $C, D \subseteq \mathbb{N}$ ופונקציה $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ כך ש- f על וגם $f(C \cap D) \subset f(C) \cap f(D)$.
- ד. הוכח כי $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$.

(6) תהי A קבוצה ותהי $f: A \rightarrow A$ פונקציה הוכח או הפוך כל אחת מהטענות הבאות.

א. אם $f \circ f = f$ אז $f = I$.

ב. אם $f \circ f = f$ אז $f = I$ או ש- f היא פונקציה קבועה.

ג. אם $f \circ f = f$ וגם f חח"ע אז $f = I$.

ד. אם $f \circ f = f$ וגם f על אז $f = I$.

(7) יהיו $f, g, h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ הפרך כל אחת מהטענות הבאות. (שאלה קשה מאוד)

א. אם $f \circ g = f \circ h$ וגם f על וגם g, h חח"ע וגם אז $g = h$.

ב. אם $g \circ f = h \circ f$ וגם f חח"ע וגם g, h על אז $g = h$.

ג. אם $f \circ f \circ f = I$ אז $f \circ f = I$.

ד. אם $f \circ f \circ f = f \circ f$ אז $f \circ f = f$.

(8) תהי A קבוצה ו- B תת קבוצה החלקית ממש ל- A . נתונות הפונקציות $f, g: P(A) \rightarrow P(A)$

המוגדרות באופן הבא: $g(X) = X \cap B$
 הוכח או הפוך: $f \circ g$ על. $f(X) = A - X$

(9) הוכח או הפוך את הטענה הבאה: הפונקציה $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ המוגדרת על-ידי

$$f((x, y)) = (3x + 4y, 4x + 5y)$$

היא פונקציה הפיכה.

(10) תהי $P_{\text{even}}(\mathbb{N})$ קבוצת כל התת קבוצות של \mathbb{N} שעוצמתן זוגית. ותהי $P_{\text{odd}}(\mathbb{N})$ קבוצת כל התת

קבוצות של \mathbb{N} שעוצמתן אי זוגית. לדוגמה $\{1, 3\} \in P_{\text{even}}(\mathbb{N}), \{1, 3\} \notin P_{\text{odd}}(\mathbb{N})$ ולעומת זאת

$\{2, 4, 6\} \in P_{\text{odd}}(\mathbb{N}), \{2, 4, 6\} \notin P_{\text{even}}(\mathbb{N})$. לכל קבוצה A סופית של טבעיים נסמן ב- $\max(A)$

את המספר הגדול ביותר ב- A וב- $\max(\emptyset) = 0$ הוכיחו כי הפונקציה $f: P_{\text{even}}(\mathbb{N}) \rightarrow P_{\text{odd}}(\mathbb{N})$

המוגדרת על ידי $f(A) = A \cup \max(A)$ היא חח"ע אך אינה על.

(11) נגדיר פונקציה $F : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow P(\{0,1\} \times \{0,1\})$ באופן הבא:

$$F(g) = \{(g(n), g(n+1)) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

הוכי כי F אינה על.

(12) נגדיר פונקציה $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ כך: $h(x) = 2x$ הוכח כי $\{f \circ h \mid f \in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}\} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

(13) נגדיר את היחס R מעל $P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $ARB \Leftrightarrow \exists b \in B (\forall a \in A (a < b))$

בנה פונקציה $f : \mathbb{N} \rightarrow P(\mathbb{N})$ שמקיימת: $\forall x, y \in \mathbb{N} (x < y \Leftrightarrow f(x) R f(y))$

(14) נתונות שלוש פונקציות $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

הוכח כי אם $f \circ g$ חח"ע וגם $g \circ h$ חח"ע וגם $h \circ g \circ f$ על אז f, g, h שלושתן הפיכות.

(15) בנה באופן מפורש תת קבוצה של $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ששקולה ל- \mathbb{N}

(16) נגדיר $F : \mathbb{N}^{\mathbb{R}} \rightarrow P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $F(f) = \{n \in \mathbb{R} \mid f(x) = 1\}$ הוכח כי F אינה חח"ע.

(17) נגדיר פונקציה $F : \{0,1,2\}^{\mathbb{N}} \rightarrow P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $F(f) = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = 0\}$

קבע האם F חח"ע ועל.

(18) תהי \mathbb{N} הטבעיים ותהי $B \subseteq \mathbb{N}$ תת קבוצה סופית לא ריקה נתונה.

דוגמה: עבור $B = \{1,2\}$ מתקיים: $f(\{2,3\}) = \{3\}, f(\{3,4\}) = \{1,2,3,4\}$

א. הוכח כי אם $X \cap B = \emptyset$ אז $f(f(X)) = X$.

ב. הוכח כי אם $B \subseteq X$ אז $f(f(X)) = X$.

ג. הוכח כי אם X שייכת לתמונה של הפונקציה אז $f(f(X)) = X$.

ד. האם הפונקציה חח"ע?

ה. האם הפונקציה על?

ו. מה העוצמה של התמונה של הפונקציה?

תרגילים ביחסים

(1) (חימום) רשום במפורש את היחסים כקבוצה של זוגות סדורים.

א. היחס R המוגדר מעל A באופן הבא: $aRb \Leftrightarrow b > a + 3$ כאשר:

$$A = \{5, 6, 7\} \quad (ii) \quad A = \{3, 5, 19, 103\} \quad (ii) \quad A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \quad (i)$$

(2) נתונים שני היחסים הבאים מעל $A = \{1, 2, 3\}$

$$R_1 = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3)\} \quad R_2 = \{(1, 2), (2, 2), (2, 3), (2, 1)\}$$

עבור כל אחד מארבעת היחסים $R_1, R_2, R_1 \cap R_2, R_1 \cup R_2$ קבע האם הוא רפלקסיבי, סימטרי, טרנזיטיבי.
(במקרה של הפרכה הבא דוגמה מתאימה)

(3) לגבי כל אחד מהיחסים הבאים, רשום שלושה זוגות שנמצאים ביחס, ונמק מדוע הם ביחס. כתוב שלושה זוגות שאינם ביחס, ונמק מדוע אינם ביחס. כמו כן קבע האם היחס הוא רפלקסיבי, אנטי רפלקסיבי, סימטרי, א"ס חלש, א"ס חזק, וטרנזיטיבי.

(א) יחס $@$ מעל \mathbb{R} המוגדר באופן הבא: $(x, y) \in @ \Leftrightarrow |x - y| \leq 100$.

(ב) יחס \clubsuit מעל \mathbb{Z} המוגדר באופן הבא: $3|x - y \Leftrightarrow (x, y) \in \clubsuit$.

(ג) היחס \subseteq מעל $P(\mathbb{N})$ המוגדר באופן הבא: $A \subseteq B \Leftrightarrow (A, B) \in \subseteq$.

(ד) היחס שרגא מעל \mathbb{R} המוגדר באופן הבא: שרגא $(x, y) \Leftrightarrow x + y \geq x \cdot y$

(ה) יחס T מעל \mathbb{Z} המוגדר באופן הבא: $(x, y) \in T \Leftrightarrow x^2 + y \geq 1$

(4) מצא אלו מהתכונות: רפלקסיביות, אנטי רפלקסיביות, סימטריות, אנטי סימטריות חלשה, אנטי סימטריות חזקה וטרנזיטיביות מקיים כל אחד מהיחסים הבאים. מעל הקבוצות

$$\mathbb{Z}, \mathbb{N}, A = \{3, 5, 7, 9\}$$

$$xRy \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z}_{\text{odd}} \quad x = my \quad \text{א.}$$

$$xSy \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z}_{\text{even}} \quad x = my \quad \text{ב.}$$

$$xRy \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z}_{\text{odd}} \quad (x = my \vee y = mx) \quad \text{ג.}$$

(5) תהי A קבוצה ו- R יחס מעל A הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות.

בכל המקרים בהם בחרת להפריך תן דוגמה נגדית מינימלית. בדוק האם יש בדוגמתך פרטים מיותרים והסר אותם.

- א. אם R סימטרי אז R טרנזיטיבי.
- ב. אם R אנטי סימטרי חלש אז R טרנזיטיבי.
- ג. אם R סימטרי וגם אנטי סימטרי חלש אז R טרנזיטיבי.
- ד. אם R סימטרי וגם אנטי סימטרי חלש אז $R = \emptyset$.
- ה. אם R סימטרי וגם אנטי סימטרי חזק אז $R = \emptyset$.
- ו. אם R טרנזיטיבי וסימטרי אז R רפלקסיבי.
- ז. אם R טרנזיטיבי ואנטי רפלקסיבי אז R אנטי סימטרי חזק.
- ח. אם R טרנזיטיבי ולא סימטרי אז R אנטי סימטרי חלש.

(6) תהי A קבוצה ויהיו R, S יחסים מעל A הוכח או הפרך את הטענות הבאות (הפרכה = דוגמה מינימלית)

- א. אם R, S רפלקסיבים אז $R \cap S$ רפלקסיבי.
- ב. אם R, S רפלקסיבים אז $R \cup S$ רפלקסיבי.
- ג. אם R, S סימטרים אז $R \cap S$ סימטרי.
- ד. אם R, S סימטרים אז $R \cup S$ סימטרי.
- ה. אם R, S טרנזיטיבים אז $R \cap S$ טרנזיטיבי.
- ו. אם R, S טרנזיטיבים אז $R \cup S$ טרנזיטיבי.
- ז. אם R, S יחסי שקילות אז $R \cap S$ יחס שקילות.
- ח. אם R, S יחסי שקילות אז $R \cup S$ יחס שקילות.
- ט. אם R, S אנטי סימטרים חלש אז $R \cap S$ אנטי סימטרי חלש.
- י. אם R, S אנטי סימטרים חלש אז $R \cup S$ אנטי סימטרי חלש.

(7) יהי R יחס סדר חלש מעל A ויהי S יחס סדר חלש מעל B . הוכח כי אם $A \cap B = \emptyset$ אז $R \cup S$ יחס סדר חלש מעל $A \cup B$.

(8) הוכח כי היחס R המוגדר מעל הקבוצה $A = \{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ע"י $aRb \Leftrightarrow a|b$ הוא יחס סדר מלא.

(9) נגדיר יחס R מעל הקבוצה $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ באופן הבא: $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow (a \leq c \wedge b \leq d)$

א. הוכח כי R יחס סדר חלש שאינו מלא.

ב. מצא תת קבוצה אינסופית של $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ שעליה היחס R הוא מלא.

(10) תהי $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ קבוצת כל הזוגות הסדורים של המספרים הטבעיים.

ויהי $R \subseteq A^2$ יחס המוגדר על ידי: $(m_1, n_1)R(m_2, n_2) \Leftrightarrow m_1 - m_2 = n_1 - n_2$

א. הוכח כי R הינו יחס שקילות ב- A .

ב. תארו באופן גרפי את מחלקות השקילות הבאות. $[(1,1)]_R, [(1,2)]_R, [(2,1)]_R$.

(11) יהי R יחס סימטרי וטרזיטיבי מעל A כך ש: $\forall a \in A \exists b \in A aRb$ הוכח כי R רפלקסיבי.

(12) נתון היחס R מעל \mathbb{N} . $xRy \Leftrightarrow (6 \mid x - y) \vee (3 \nmid x \cdot y)$ (אין צורך להוכיח כי R יחס שקילות)

מצא את מחלקות השקילות ואת קבוצת המנה.

(13) נגדיר יחס בינארי E מעל $\mathbb{Z} - \{0,1\}$ (קבוצת השלמים ללא 0 ו-1) באופן הבא: $aEb \Leftrightarrow ab \geq -1$ הוכח כי

E יחס שקילות ותן תיאור מפורש של מחלקות השקילות שלו.

(14) תהי S קבוצה שאבריה הן קבוצות מגדירים יחס בינארי E מעל S באופן הבא: $AEB \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

הוכיחו או הפריכו: E יחס שקילות.

(15) יחס R מעל A נקרא סוגר משולשים אם לכל $a, b, c \in A$ מתקיים: $(aRb \wedge bRc) \rightarrow cRa$

א. הוכח כי יחס רפלקסיבי וסוגר משולשים הוא יחס שקילות.

ב. הוכח כי אם R סימטרי, סוגר משולשים ואינו ריק אז R אינו אנטי רפלקסיבי.

(16) נגדיר יחס סדר (חלש) S מעל \mathbb{R} באופן הבא: $xSy \Leftrightarrow \neg((\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor \rightarrow y < x))$

אין צורך להוכיח שמדובר ביחס סדר. כתוב במפורש את כל האיברים המינימלים של S .

תזכורת $x \in A$ נקרא מינימלי ביחס סדר R אם $\forall y \in A ((y \neq x) \rightarrow \neg(yRx))$

(17) נגדיר יחס שקילות S מעל \mathbb{R} באופן הבא: $xSy \Leftrightarrow (x = y = 0) \vee (xy > 0)$

נגדיר יחס שקילות T מעל \mathbb{R} באופן הבא: $xTy \Leftrightarrow (x^2 - 9)S(y^2 - 9)$

אין צורך להוכיח כי מדובר ביחסי שקילות. כתוב במפורש את קבוצת המנה \mathbb{R}/T ונמק בקצרה.

(18) נגדיר יחס בינארי D מעל הקבוצה $\mathbb{R}^2 = \{(a,b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$

באופן הבא: $(a_1, b_1) D (a_2, b_2) \Leftrightarrow (a_1 \geq a_2) \wedge (a_1 + b_1 \geq a_2 + b_2)$

הוכח כי D יחס סדר חלש שאינו מלא.

(19) רשום במפורש את כל יחסי השקילות E מעל $S = \{a, b, c, d\}$ המקיימים $|S/E| = 2$ וכל מחלקות השקילות הן

שוות עוצמה. יש להציג כל יחס כתת קבוצה מפורשת של $S \times S$.

(20) יהיו R, S יחסי שקילות מעל A . הוכח כי $R \Delta S$ לא יחס שקילות מעל A .

(21) הוכח או הפרך: לכל קבוצה A ולכל יחס רפלקסיבי R מעל A קיימות קבוצות $B, C \subseteq A$ כך ש- $R = B \times C$

(22) יהי S יחס אנטי רפלקסיבי וטרנזיטיבי מעל קבוצה A . ונניח ש'יים $y \in A$

עבורו מתקיים: $\forall x \in A (x, y) \in S$ הוכח כי לכל $z \in A$ מתקיים: $(y, z) \notin S$

(23) יהי S יחס המוגדר מעל $P(\mathbb{N})$ קבוצת החזקה של \mathbb{N} באופן הבא: $\min A = \min B \Leftrightarrow ASB$

כאשר $\min A$ הוא המספר הקטן ביותר ב- A .

א. הוכח כי S הינו יחס שקילות.

ב. נסמן ב- K את קבוצת מחלקות השקילות של היחס S .

בנה פונקציה $F : K \rightarrow \mathbb{N}$ חח"ע ועל.

פונקציות ויחסים משולב

(24) תהינה A, B שתי קבוצות לא ריקות ויהיו $<_A, <_B$ שני יחסי סדר חזקים ומלאים (משווים) מעל A, B בהתאמה. ותהי $f: A \rightarrow B$ פונקציה המקיימת אם $a_1 <_A a_2$ אז $f(a_1) <_B f(a_2)$. הוכח כי f חח"ע אך אינה בהכרח על.

(25) יחס T מעל $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ מוגדר באופן הבא: $fTg \Leftrightarrow f \circ g = g \circ f$ הוכח או הפרך: יחס שקילות

(26) תהי J קבוצת כל היחסים מעל A ו- E קבוצת כל יחסי השקילות מעל A .

נגדיר פונקציה $F: J \times E \rightarrow J$ באופן הבא: $F(R, S) = R \cap S$. הוכח כי F על.

(27) נגדיר יחס S על הקבוצה $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ באופן הבא: $(x_1, x_2)S(y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 - x_2 = y_1^2 - y_2$

S יחס שקילות. (אין צורך להוכיח). הוכח כי קבוצת המנה $\mathbb{R} \times \mathbb{R} / S$ שוות עוצמה לקבוצה \mathbb{R}

(28) תהי $F: A \rightarrow A$ פונקציה. נגדיר יחס R מעל A באופן הבא: $aRb \Leftrightarrow f(a) = b$ נתון ש- R סימטרי וטרנזיטיבי. הוכח כי F היא פונקצית הזהות.

(29) תהי A קבוצה לא ריקה ותהי A^A קבוצת כל הפונקציות מ- A ל- A . מגדירים יחס E מעל A^A באופן הבא:

לכל $f, g \in A^A$ אם ורק אם קיימת $h \in A^A$ הפיכה כך ש- $f = h \circ g$.
א. הוכח כי E יחס שקילות.

ב. הי $c \in A$ כלשהוא. תהי $f_c: A \rightarrow A$ הפונקציה הקבועה המוגדרת ע"י $f_c(x) = c \forall x \in A$ תאר את מחלקת השקילות של f_c ביחס ל- E (תן תאור מפורש ככל הניתן). נמק טענותיך.

(30) יהי היחס T המוגדר מעל הקבוצה $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ באופן הבא: $fTg \Leftrightarrow$ קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש- $f(x) = g(x)$ האם T יחס שקילות?

(31) תהי A קבוצה סופית ותהי B תת קבוצה של A . נסמן ב- F את קבוצת כל הפונקציות מ- A ל- $\{0,1\}$.

נגדיר יחס E מעל F באופן הבא: $F = \{(f, g) \mid B \subseteq \{x \mid f(x) = g(x)\}\}$

א. בהנתן $A = \{1, 2, 3\}$ ו- $B = \{1, 2\}$ תנו דוגמא ל- $f, g, h \in F$ שונות כך ש- $(f, g) \in E, (f, h) \notin E$.
ב. הוכיחו כי E יחס שקילות.

ג. מה עוצמת קבוצת המנה F/E ? נמקו תשובתכם.

תרגילים בקומבינטוריקה בסיסית

(1) בכמה אופנים ניתן לסדר 10 אנשים בשורה כך ש-

- א. ללא הגבלה.
- ב. אבי ובני סמוכים.
- ג. אבי, בני וגדי סמוכים.
- ד. אבי ובני לא סמוכים.
- ה. אבי ובני סמוכים וגם גדי ודני סמוכים.
- ו. אבי ובני סמוכים וגדי ודני לא סמוכים.

(2) בכיתה בה יש 10 בנים ו-15 בנות יש להרכיב נבחרת כדורסל בה יש לפחות 2 בנים ולפחות 2 בנות בכמה דרכים ניתן לעשות זאת?

(3) בכמה אופנים שונים ניתן להניח 8 צריחים על לוח 8×8 בלי שאף צריח יאיים על חברו כך ש-

- א. כל הצריחים הם לבנים.
- ב. שלושה צריחים הם לבנים וחמישה הם שחורים.
- ג. הצריחים נלקחים מתוך שקית ובה מלאי בלתי מוגבל של צריחים לבנים ומלאי בלתי מוגבל של צריחים שחורים.

(4) בכמה מספרים 6 ספרתיים מופיעה הספרה

- א. 0 פעם אחת בדיוק.
- ב. 0 פעם אחת לפחות.
- ג. 7 פעם אחת לפחות.
- ד. 7 פעם אחת בדיוק. יש לזכור שמספר לא יכול להתחיל בספרה 0.

(5) א. יהי n טבעי בכמה תת קבוצות של $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ יש אי זוגי אחד לפחות?

ב. בכמה תת קבוצות של $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ יש לפחות $n + 1$ איברים.

(6) בכמה אופנים שונים ניתן לחלק 10 לימונדות זהות 1 כוס קולה ו-1 כוס קינלי ל-4 תלמידים צמאים כך שכל תלמיד מקבל

לפחות משקה אחד והקולה והקינלי ניתנים לתמידים שונים?

(7) בכמה דרכים ניתן לחלק 400 כדורים זהים ל-3 תאים כך ש-

- א. יש תא ובו יותר מ-200 כדורים.
- ב. בכל תא מספר זוגי של כדורים.
- ג. בשני תאים מתוך השלוש מספר אי זוגי של כדורים ובתא אחד מספר זוגי של כדורים.

8) 7 אנשים נכנסים למעלית בבניין בן 13 קומות בכמה אופנים הם יכולים ללחוץ על כפתורי המעלית כך ש-

- המעלית תעצור בקומה החמישית? (יתכן ותמשיך הלאה משם)
- המעלית תעצור בקומה החמישית לכל היותר.
- המעלית תגיע לפחות עד הקומה החמישית.
- המעלית תעצור בקומה החמישית. (ולא תמשיך משם הלאה)

9) בכמה דרכים ניתן לחלק n כדורים לבנים זהים ו- n כדורים צבעוניים (שונים) ל- $2n$ כך שבכל תא יהיה

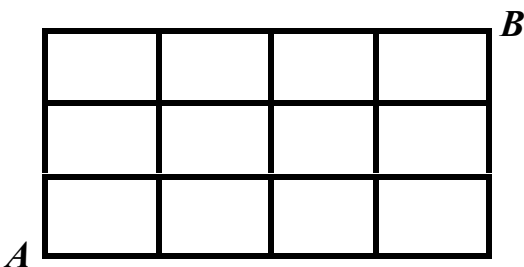
- לכל היותר כדור אחד.
- לכל היותר כדור לבן אחד ואין מגבלה על מספר הצבעוניים.
- לכל היותר כדור צבעוני אחד ואין הגבלה על מספר הלבנים.
- מספר שווה של לבנים וצבעוניים.

10) במלבן בן k שורות ו- m עמודות יש לסמן \times או \circ בכל משבצת.

א. הראו כי יש $(2^m - 1)^k$ דרכים לעשות זאת כך שבכל שורה יופיע \times אחד לפחות.

ב. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת כך שיופיע \circ אחד לפחות בכל עמודה.

ג. הסיקו כי $2^{mk} \leq (2^m - 1)^k + (2^k - 1)^m$



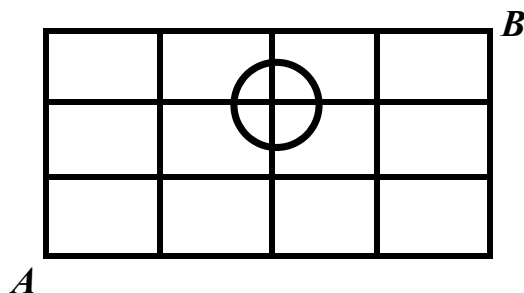
11) חרגול נמצא בנקודה A כשריג המתואר להלן. בכל שלב יכול החרגול

להתקדם צעד אחד ימינה או צעד אחד למעלה.

א. בכמה אופנים שונים יכול החרגול להגיע מנקודה A לנקודה B ?

ב. בכמה אופנים הוא יכול לעשות זאת מבלי לעבור דרך

נקודה המסומנת להלן?



12) א. בכמה אופנים שונים ניתן לחלק 12 אנשים לשלושה זוגות ושתי שלשות?

ב. כמו א. אך בנוסף דני ודנה לא נמצאים באותה קבוצה.

13) כמה פתרונות בשלמים אי שליליים יש לכל אחת מהמשוואות הבאות?

א. $x_1 + x_2 + \dots + x_7 = 20$

ב. $x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 14$

ג. $(x_1 + x_2 + x_3)(x_4 + x_5 + x_6) = 18$

14) בכמה דרכים ניתן לבחור ועדה בת n אנשים מתוך n זוגות נשואים כך ש-

א. בועדה לא ישתתף אף זוג נשוי.

ב. מספר הגברים יהיה שווה למספר הנשים.

ג. מספר הגברים יהיה קטן ממש ממספר הנשים.

15) מצאו בכמה פונקציות $f : \{1, 2, 3, \dots, 3n-1, 3n\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n-1, n\}$ מקיימות את התנאי הבא: לכל אבר בתמונה יש בדיוק 3 מקורות.

16) מה מספר הדרכים לפזר 50 כדורים אדומים ו-20 כדורים כחולים ל-10 תאים, כך שבכל תא מספר הכדורים האדומים יהיה לפחות כמספר הכדורים הכחולים?

17) בכמה דרכים ניתן לחלק קבוצה בגודל $2n$ לקבוצה בגודל n ולזוגות. (ניתן להניח כי n זוגי)

18) בכמה דרכים ניתן לסדר בשורה 8 פילים שונים, 2 שועלים זהים ושתי תרנגולות זהות, כך שהפילים מסודרים משמאל לימין על פי משקלם בסדר עולה, ואף שועל לא יהיה צמוד לתרנגולת?

19) בכמה דרכים ניתן לחלק 100 כדורים לבנים ו-50 כדורים צבעוניים (כל אחד בצבע שונה) ל-250 תאים באופן שיתקיימו שני התנאים הבאים: יהיה לפחות תא אחד שמכיל יותר מכדור לבן אחד, וכמו-כן יהיה לפחות תא אחד שמכיל יותר מכדור צבעוני אחד?

20) בכמה דרכים ניתן לסדר n גברים ו- n נשים במעגל כך שבני אותו מין לא ישבו זה לצד זה? כנ"ל לגבי שורה.

21) יש לבחור קבוצה של ששה ילדים מבין תלמידי כיתות א-1 ו-א-2, באופן ששלושה מהם יהיו מ-א-1 ושלושה מ-א-2. מספר הבנים בקבוצה צריך להיות שווה למספר הבנות בקבוצה (3 ו-3). ב-א-1 יש 10 בנים ו-15 בנות וב-א-2 יש 15 בנים ו-10 בנות. בכמה אופנים ניתן לבחור את הקבוצה?

22) בכמה קבוצות של n כדורים ב-10 צבעים יש לפחות כדור אחד מכל צבע?

(23) כמה פונקציות $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ ($n \geq 1$) מקיימות את התנאי $f(k) \neq f(k+1)$ לכל $1 \leq k \leq n-1$?

(24) כמה פונקציות $f: \{1, 2, 3, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$ חז"ע ועל יש המקיימות $f(k) - k$ זוגי לכל

$$k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

(25) כמה סדרות בינריות באורך n יש המורכבות מ- k אחדים ו- $n-k$ אפסים שאין בהם שני אחדים רצופים?

(26) בכמה דרכים ניתן לחלק 60 כדורים צבעוניים (כל אחד בצבע שונה) ו-90 כדורים לבנים זהים ל-100 תאים כך שיתקיימו שני התנאים הבאים גם יחד. יהיה לפחות תא אחד שמכיל יותר מכדור צבעוני אחד וכמו כן בכל תא יהיו לכל היותר 50 כדורים לבנים.

(27) בכמה דרכים ניתן לחלק 4 בננות, 2 תפוזים, ו-4 תפוחים ל-10 אנשים כך שכל אחד יקבל בדיוק פרי אחד? שימו לב שפירות מאותו סוג נחשבים זהים.

(28) בכמה דרכים ניתן לבנות שורה מ- $k \geq 0$ כדורים לבנים זהים ו- $m \geq 0$ כדורים צבעוניים שונים. (ושונים מלבן)?

תרגילים בנושא זהויות קומבינטוריות והבינום של ניוטון

$$(1) \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = 3^n \quad \text{הוכח אלגברית וקומבינטורית את הזהות}$$

$$(2) \quad 6^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{2n-k} \quad \text{הוכיחו לכל } n \geq 0 \text{ את הזהות}$$

$$(3) \quad 2^n = 3^n - n3^{n-1} + \binom{n}{2} 3^{n-2} - \dots + (-1)^k \binom{n}{k} 3^{n-k} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} 3^0 \quad \text{הוכח את השוויון הבא:}$$

$$(4) \quad \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k} = 2^{2n} \quad \text{הוכיחו שלכל } n \text{ טבעי מתקיים:}$$

$$(5) \quad \binom{m+n}{2} = \binom{n}{2} + \binom{m}{2} + mn \quad \text{הוכח בדרך אלגברית ובדרך קומבינטורית את הזהות הבאה:}$$

$$(6) \quad \text{הוכח כי לכל } n \in \mathbb{N} \text{ המספר } \binom{2n}{n} \text{ הוא זוגי.}$$

$$(7) \quad \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} 2^{k-1} = \frac{n}{3} \cdot 3^n \quad \text{הוכח כי}$$

$$(8) \quad \forall x, y, n \in \mathbb{N}^+, \binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \binom{y}{n-k} \quad \text{הוכיחו כי:}$$

$$(9) \quad \sum_{k,j=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{j} \binom{n}{k+j} = \binom{3n}{n} \quad \text{הוכח את השוויון הבא}$$

$$(10) \quad \binom{r}{m} \binom{m}{k} = \binom{r}{k} \binom{r-k}{m-k} \quad \text{הוכח בדרך אלגברית ובדרך קומבינטורית את הזהות הבאה}$$

$$(11) \quad \binom{n}{k} + 2 \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} = \binom{n+2}{k+2} \quad \text{הוכח כי לכל } 0 \leq n \text{ ולכל } 0 \leq k \leq n \text{ מתקיים}$$

$$(12) \quad (2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \dots \cdot 1 = \frac{\binom{2n}{2} \cdot \binom{2n-2}{2} \cdot \dots \cdot \binom{2}{2}}{n!} \quad \text{הוכח אלגברית וקומבינטורית את הזהות הבאה}$$

$$(13) \quad \sum_{k=1}^n k(n-k) \binom{2n}{k} \binom{3n}{n-k} = 6n^2 \binom{5n-2}{n-2} \quad \text{הוכח את הזהות הבאה}$$

$$(14) \quad \sum_{n=0}^N \binom{k-1+n}{n} = \binom{k+N}{N} \quad \text{הוכיח את השוויון הבא}$$

$$(15) \quad 2^n > \binom{n}{2} \quad \text{הוכיחו, כי אם } n > 0 \text{ מספר זוגי אז}$$

16) כמה מבין המספרים בפיתוח הבינום $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{7})^{80}$ הם שלמים?

17) הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים: $n^n - (n-1)^n = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (n-1)^{n-i}$

תרגילים בנושא הכלה והדחה

- (1) כמה מילים באורך n יש מעל הא"ב $\{A, B, C, D\}$ כך שהאותיות A, B חייבות להופיע?
- (2) לארוחת ערב הוזמנו חמישה אנשים. המארח קנה 10 מתנות שונות. בכמה דרכים ניתן לחלק את המתנות בין האורחים כך שכל אורח יקבל לפחות פרס אחד?
- (3) בכמה דרכים יכול שירות בתי הסוהר לפזר 300 פליטים מאריתראה בחמישה תאי כלא כך שבשום תא לא יהיו יותר מ-100 פליטים? שימי לב: שירות בתי הסוהר לא מבדיל בין הפליטים השונים
- (4) בקייטנת ההשקעות הלא-הגיוניות יש חמישה קורסים. בכל אחד מחמשת הקורסים רשומים בדיוק 55 ילדים. לכל זוג קורסים יש בדיוק 44 ילדים שרשומים לשניהם. לכל שלושה מהקורסים יש בדיוק 33 ילדים שרשומים לשלושתם. לכל ארבעה מהקורסים יש בדיוק 22 ילדים שרשומים לארבעתם. הוכיחו כי יש לפחות ילד אחד שרשום לכל חמשת הקורסים בו זמנית.
- (5) א. בכמה מספרים קטנים ממליון סכום הספרות הוא 23 בדיוק? (שאלה זו מופיעה גם בפרק על פונקציות יוצרות)
 ב. בכמה מספרים קטנים ממליון סכום הספרות הוא 31 בדיוק?
 ג. בכמה מספרים קטנים ממליון סכום הספרות הוא 23 לכל היותר?
- (6) מטילים קוביה 8 פעמים ורושמים את התוצאות כסדרה של 8 מספרים. מה מספר האפשרויות לסדרות באורך 8 של הטלות, שבהן כל ששת המספרים מ-1 עד 6 יופיעו (כל מספר לפחות פעם אחת)?
- (7) במערכת שנה א של התוכנית למדעי המחשב באקדמיה המכללתית של תל-יפו-אביב יש חמישה קורסים. בכל אחד מחמשת הקורסים רשומים בדיוק 40 תלמידים. לכל זוג קורסים יש בדיוק 32 תלמידים שרשומים לשניהם. לכל שלושה מהקורסים יש בדיוק 24 תלמידים שרשומים לשלושתם. לכל ארבעה מהקורסים יש בדיוק 16 תלמידים שרשומים לארבעתם. הוכיחו שיש לפחות תלמיד אחד שרשום לכל חמשת הקורסים בו זמנית.
הדרכה: על סמך הנתונים כתבי ביטוי שמתאר כמה תלמידים יש בכל חמשת הקורסים יחד.
- (8) לארוחת ערב הוזמנו חמישה אנשים. המארח קנה 10 מתנות שונות. בכמה דרכים ניתן לחלק את המתנות בין האורחים כך שכל אורח יקבל לפחות פרס אחד?
- (9) איש ציבור מושחת לוקח כל שנה שוחד בסך 2, 4 או 6 מליון דולר (שלא כמו איש ציבור נורמטיבי בסעיף 1א, איש ציבור מושחת יכול לקחת שוחד של 6 מליון דולר מספר שנים ברציפות). סדרת שוחד היא סדרת סכומים שקיבל איש ציבור מושחת במשך כמה שנים, למשל 6,6,2,4,2. כמה סדרות שוחד יניבו עבור איש ציבור מושחת סך של 20 מליון דולר במשך 6 שנים?
- (10) כמה מילים באורך n יש מעל הא"ב $\{A, B, C, D\}$ כאשר A, B חייבות להופיע?
- (11) עבור $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ כמה פונקציות f חח"ע על ישנן $f : A \rightarrow A$ כך ש- $f(k) \neq k$ עבור $k = 1, 2, 3$

12) בכמה תמורות של המספרים $\{1,2,3,4,\dots,18\}$ כל המספרים שמתחלקים ב-3 במקומות של מספרים שמתחלקים בשלוש ואף זוגי לא במקומו?

13) ברשותך שלושה כדורים לבנים זהים, שלושה כדורים שחורים זהים, ומאגר בלתי מוגבל של כדורים אדומים זהים. בכמה אופנים ניתן להרכיב מהם קבוצה (סדר הכדורים לא משנה) בת n כדורים. פתור הן בעזרת פונקציות יוצרות והן בעזרת הכלה והדחה והשווה את התוצאות.

14) 7 משפחות בנות שלוש נפשות כל אחת (אבא, אמא וילד) מגיעות למפגש חברתי. בכמה אופנים ניתן לסדר אותם בשלוש כן ש-א. ללא הגבלה?

ב. כל שלשה תהיה מורכבת מאבא, אמא וילד אבל אף שלשה לא תרכיב משפחה שלמה?
ג. אף שלשה לא תרכיב משפחה שלמה (כלומר יתכן שלשה המורכבת משלושה אבות או שני אבות וילד)

15) בכמה דרכים ניתן לחלק 40 כדורים לארבעה תאים כך שאף תא לא יהיה ריק.
א. הכדורים זהים.
ב. הכדורים שונים.

16) ארבעה אנשים שונים (ששמותיהם $1,2,3,4$) אחראים יחד על ביצוע של 5 משימות שונות (משימות א,ב,ג,ד,ה). לביצוע כל משימה נדרשים בדיוק שני אנשים. אין הבדל בין תפקידי שני האנשים בצוות המבצע משימה נתונה.
א. בכמה דרכים ניתן להקצות את 5 המשימות לצוותים של שני אנשים? הנה כמה דוגמאות לדרכים לגיטימיות לעשות זאת:
דוגמא 1: הצוות $\{1,2\}$ יבצע את כל 5 המשימות!
דוגמא 2: הצוות $\{1,2\}$ יבצע את משימות א,ב, הצוות $\{1,3\}$ את משימות ג,ד והצוות $\{2,3\}$ את משימה ה.
דוגמא 3: הצוות $\{1,2\}$ יבצע את משימות א,ב, הצוות $\{3,4\}$ את משימות ג,ד והצוות $\{2,3\}$ את משימה ה.
ב. בכמה דרכים ניתן להקצות את 5 המשימות לצוותים של שני אנשים, אם אסור שמישהו יתחמק לגמרי מעבודה: כל אחד מ-4 האנשים חייב לקחת חלק במשימה אחת לפחות (דוגמאות 1, 2 בסעיף א אינן חוקיות כעת. דוגמא 3 - חוקית).

17) דנה, תלמידה בכיתה א', קראה בספר את המשפט המעניין: **דנה קמה דנה נמה**. אחרי שקראה בהצלחה את המשפט, עלו בדעתה של דנה כמה שאלות מעניינות לא פחות:

א. בכמה דרכים אפשר לסדר את כל 12 האותיות שבמשפט הזה במחרוזת אחת ללא רווחים, כגון **דנהקמהדנהנמה**.
ב. בכמה מהדרכים הללו מופיע בתוך המחרוזת הרצף **דמקה**?
ג. מה מספר הדרכים לסדר את 12 האותיות כך שלא תופיע בתוך המחרוזת אף אחת מארבע המחרוזות הבאות: **דמקה**,

קהה, ממד, נננה

(18) בבחינה מתמטיקה בדידה בקורס זה יש 11 שאלות בארבעה נושאים כדלהלן: 2 שאלות בקומבינטוריקה בסיסית, 3 שאלות בפונקציות יוצרות, 2 שאלות בגרפים ו-4 שאלות בהכלה והדחה. צריך לענות על 6 שאלות לפחות (אפשר יותר) וחייבים לענות על לפחות שאלה אחת מכל נושא. בכמה אופנים ניתן לעשות זאת.

(19) בכמה דרכים ניתן להרכיב מילה מהמספרים $\{1,2,3,\dots,n\}$ כך שכל מספר יופיע k פעמים אל אף מספר לא יופיע k פעמים ברצף?

תרגילים בנושא פונקציות יוצרות

$$(1) \quad \text{מה המקדם של } x^{10} \text{ בביטוי } \left(x^2 - \frac{1}{2}x + 2\right)^{30} ?$$

(2) בנה פונקציה יוצרת למספר האפשרויות של דני לקנות בסופר 50 מוצרי חלב לבית מסוג שוקו, מוקה ובננה. כאשר משקה בננה מגיע רק באריזות של שלוש, משקה שוקו בזוגות (משקה מוקה אפשר לקנות ביחידים) ואחותו של דני אוהבת רק מוקה. (שימו לב שעליו לחזור הביתה עם משקאות לכל בני המשפחה).

(3) איש ציבור מושחת לוקח כל שנה שוחד בסך 2, 4 או 6 מליון דולר (שלא כמו איש ציבור נורמטיבי בסעיף 1א, איש ציבור מושחת יכול לקחת שוחד של 6 מליון דולר מספר שנים ברציפות). סדרת שוחד היא סדרת סכומים שקיבל איש ציבור מושחת במשך כמה שנים, למשל 2,4,2,6,6. כמה סדרות שוחד יניבו עבור איש ציבור מושחת סך של 20 מליון דולר במשך 6 שנים?

$$(4) \quad \text{יהי } a_n \text{ המקדם של } x^n \text{ בפיתוח של הפונקציה הבאה: } \frac{1}{(1-2x)^2} \cdot \frac{1}{(1-x)}$$

$$\text{יהי } b_n \text{ פתרון נוסחת הנסיגה } b_n = b_{n-1} + (n+1)2^n \text{ עם תנאי ההתחלה } b_0=1. \text{ הוכיחי ש } a_n=b_n.$$

הערה: אפשר לפתור את השאלה ע"י חישוב מפורש של a_n ו b_n , אבל ניתן גם למצוא קיצור דרך משמעותי בעזרת ביטוי מהצורה

$$\sum_{k=0}^n (\dots)$$

(5) יהי a_n מספר הדרכים לכתוב את n כסכום של מספר אי-שלילי של 2-ים, מספר חיובי של 3-ים, ולכל היותר שני 1-ים, כאשר סדר המחברים איננו משנה.

יהי b_n מספר הדרכים לפזר n כדורים זהים לשני תאים, כך שבתא הראשון לפחות שלושה כדורים, ובתא השני מספר זוגי של כדורים.

$$\text{הוכיחי ש } a_n = b_n.$$

(6) א. רונית יוצאת לטייל בשכונה בלוויית n חיות מחמד היא מזמינה לטיול 3 או 4 או 5 חתולים מפח האשפה (זה נקרא חתול פ"ז = פח זבל) אז בקיצר היא יוצאת עם 3 או 4 או 5 חתולי פז מספר כלשהוא של זוגות עורבים (עורבים באים בזוגות) כמו כן אם התחזית לאזרחים הסטרים לאורך המסלול רגועה יתכן שרונית תזמין גם את תנין מצריים. נסמן ב- a_n את מספר האפשרויות לבחירת n חיות מחמד לטיול של רונית. (חיות מאותו מין ביולוגי נחשבות זהות) חשבו את הפונקציה היוצרת של a_n . (תשובה סופית כמנה של פולינומים)

ב. גם נורית יוצאת לטיול עם n חיות מחמד משלה מספר האפשרויות של נורית לבחור את החיות שלה הוא b_n נתון ש-

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \frac{x+x^2}{(1-x)^4}$$

כמה אופנים יכולה נורית לבחור לעצמה 23 חיות מחמד לטיול פסטורלי?

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il

כתב ופתר - טל פלדמן ©

שיעורים פרטיים לבוחדים ולקבוצות 054-7599493

$$(7) \text{ חשבו את } a_{22} \text{ בסדרה הנוצרת על ידי } F(x) = \frac{6-10x}{1-7x+12x^2}$$

(8) בנה פונקציה יוצרת (ללא \sum) עבור מספר הדרכים לפזר n כדורים זהים ב-7 תאים כך שמספרי הכדורים בתא הראשון ובתא השביעי שווים, בתא השני והשישי יש מספר שווה של כדורים, ובתא הרביעי מספר גדול מאשר בתא הראשון והשני יחד.

$$(9) \text{ מצא נוסחה סגורה לסכום } \sum_{k=0}^n k \cdot 5^k$$

(10) נסמן ב- a_n את מספר הדרכים לפזר n כדורים זהים ב-5 תאים כך שלכל $1 \leq k \leq 5$ מספר הכדורים בתא ה- k שווה למספר

הכדורים בתא ה- $5-k+1$, וכך שמספר הכדורים בתא האמצעי גדול מסכום מספרי הכדורים בתא הראשון והשני יחד. מצאו ביטוי

$$\text{אלגברי סגור (ללא } \sum) \text{ לפונקציה היוצרת } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

(11) ברשותך שלושה כדורים לבנים זהים, שלושה כדורים שחורים זהים, ומאגר בלתי מוגבל של כדורים אדומים וירוקים זהים. בכמה אופנים ניתן להרכיב מהם קבוצה (סדר הכדורים לא משנה) 9 בת n כדורים. פתור הן בעזרת פונקציות יוצרות והן בעזרת הכלה והדחה והשווה את התוצאות.

(12) יהי a_n מספר הדרכים לכתוב את n כסכום של מספר אי-שלילי של 2-ים, מספר חיובי של 3-ים, ולכל היותר שני 1-ים, כאשר סדר המחברים איננו משנה. יהי b_n מספר הדרכים לפזר n כדורים זהים לשני תאים, כך שבתא הראשון לפחות שלושה כדורים ובתא השני מספר זוגי של כדורים. הוכיחי ש $a_n = b_n$.

(13) א. בכמה מספרים קטנים ממליון סכום הספרות הוא 23 בדיוק? (שאלה זו מופיעה גם בפרק על הכלה הדחה)
 ב. בכמה מספרים קטנים ממליון סכום הספרות הוא 31 בדיוק?
 ג. בכמה מספרים קטנים ממליון סכום הספרות הוא 23 לכל היותר?

(14) הוכיחו כי מספר הפתרונות בשלמים אי-שליליים למשוואה $x + y + z = n$ כאשר $0 \leq z \leq 1$ ו- $3 \leq x \leq 5$ זוגי, שווה למספר הפתרונות בשלמים אי-שליליים למשוואה $x + y = n$ כאשר $0 \leq y \leq 2$ ו- $3 \leq x$.

(15) נתונות סדרות $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ כלשהן, ונתון שאברי הסדרה $(c_n)_{n \geq 0}$ מקיימים $c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$ לכל $n \geq 0$. נסמן ב-

$(da)_n, (db)_n, (dc)_n$ את סדרות ההפרשים של הסדרות $(a_n)_{n \geq 0}, (b_n)_{n \geq 0}, (c_n)_{n \geq 0}$ בהתאמה. הוכיחו באמצעות פונקציות יוצרות

$$\text{כי לכל } n \geq 0 \text{ מתקיים: } (dc)_n = \sum_{i=0}^n (da)_i b_{n-i} = \sum_{i=0}^n a_i (db)_{n-i}$$

תרגילים בנושא רקורסיה

(1) לכל n שלם אי-שלילי נגדיר את a_n להיות מספר הסדרות היורדות הלא ריקות, שמורכבות ממספרים טבעיים בין 1 ל n , כך שההפרש בין כל שני מספרים עוקבים בסדרה הוא לפחות 3. כתבו נוסחת נסיגה ותנאי התחלה ל a_n .

דוגמאות:

- הסדרה (12,9,5,1) נספרת בחישוב של a_{14} , מכיוון שהיא יורדת, כל הספרות שבה הן בין 1 ל 14, וההפרשים בין כל שתי ספרות עוקבות בסדרה הם 3 או יותר.
- הסדרה (14) נספרת בחישוב של a_{14} , מכיוון שהיא יורדת, כל הספרות שבה הן בין 1 ל 14, וההפרשים בין כל שתי ספרות עוקבות בסדרה הם 3 או יותר (בגלל שאין ספרות עוקבות).
- הסדרה (12,9,7,1) אינה נספרת בחישוב של a_{14} , מכיוון שההפרש בין הספרה השנייה והשלישית בסדרה הוא 2.

(2) א) מצא נוסחת נסיגה ותנאי התחלה עבור מספר האפשרויות לחלק קבוצה בת n אנשים לזוגות ולבודדים.

ב) מצאי נוסחת נסיגה ותנאי התחלה למספר הדרכים לחלק קבוצה של n אנשים לזוגות ולשלושות, כאשר הסדר בין הזוגות והשלושות ובתוך הזוגות והשלושות איננו משנה.

(3) בחפיסת קלפי טאקי יש מספר לא מוגבל של קלפים בצבעים צהוב, אדום, כחול וירוק, ואיננו מבחינים בין קלפים שונים מאותו צבע. יהי a_n מספר ערימות קלפי טאקי בגודל n שבהם מעל קלף אדום או כחול אסור לשים קלף צהוב או ירוק. מצאי נוסחת נסיגה ותנאי התחלה ל a_n .

(4) מצא יחס רקורסיבי ותנאי התחלה עבור מספר המילים באורך n מעל $\{A, B, C\}$ ללא הרצפים הבאים. (כל סעיף שאלה בפני עצמה)

א) CC ב) AB ג) AA, AB ד) AA, BA ה) AA, AB, AC ו) AB, BC באתר מצורף פתרון בשתי דרכים ז) BA, CA ח) AA, BB ט) AA, BB, CC י) BC, CB

(5) מצא יחס רקורסיבי ותנאי התחלה עבור מספר הדרכים לרצף שביל באורך n במרצפות אדומות באורך 2, מרצפות צהובות באורך 2 מרצפות ירוקות באורך 2, ומרצפות שחורות ומרצפות לבנות באורך 1 כל אחת. ולאחר פתור את יחס הנסיגה שקיבלת, קבל נוסחה מפורשת, וחשב את ארבעת האיברים הראשונים בשתי דרכים. אחת לפי היחס הרקורסיבי ושתיים ע"י הצבה בנוסחה המפורשת שמצאת.

(6) עבור n טבעי מהו מספר הסדרות הפלינדרומיות באורך n מעל קבוצת הספרות העשרוניות $\{0,1,2,\dots,9\}$ (סידרה x_1, \dots, x_n היא פלינדרומית אם $x_i = x_{n-i+1}$ לכל $1 \leq i \leq n$ ובעברית יותר קלה אם בקריאתה מהסוף להתחלה או מההתחלה לסוף מתקבלת אותה סדרה למשל כמו (1,7,2,2,2,7,1)).

(7) נתבונן בסדרות סופיות של סימנים, הלקוחים מתוך 6 סימנים אלה: הספרות 0,1 וארבעה סימני פעולה: +, -, *, /. ובכפוף לתנאים הבאים:

א. הסדרה נפתחת ומסתיימת בספרה.

ב. אין הופעות צמודות של סימני פעולה.

דוגמאות של סדרות העונות על התנאים: 0100/101 - 11 + 1010 , 001

דוגמאות של סדרות שאינן עונות על התנאים: -00 , +00 + 10 , .101 + /00

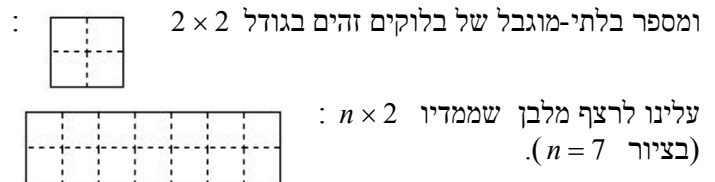
נסמן ב- a_n את מספר הסדרות הללו שבהן בדיוק n סימנים.

(א) מצא יחס נסיגה עבור a_n .

(ב) מצא אופן ישיר את a_0, a_1, a_2, a_3 . בדוק בעזרת הערכים שקיבלת את יחס הנסיגה שרשמת.

(ג) פתור את יחס הנסיגה וקבל נוסחה מפורשת עבור a_n . ובדוק בעזרת הנוסחה הנ"ל את תוצאות סעיף ב'.

(8) בידינו מספר בלתי-מוגבל של בלוקים זהים בגודל 2×1 :



אסור לחרוג מגבולות המלבן. בלוק של 2×1 אפשר להניח כרצוננו "שוכב" או "עומד". יהי a_n מספר הריצופים השונים האפשריים.

א. רשום יחס נסיגה עבור a_n (הסבר אותו) ותנאי התחלה מספיקים.

ב. פתור את יחס הנסיגה.

ג. חשב את a_4 בשתי דרכים: מתוך יחס הנסיגה שבסעיף א'.

(9) תנו ביטוי מפורש ל- a_n בנוסחאות הנסיגה הבאות וחשבו את a_3, a_4, a_5 בשתי דרכים, אחת בעזרת יחס הנסיגה ושתיים בעזרת הנוסחה המפורשת.

כאשר $a_0 = 3, a_1 = 7$ (א) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$

כאשר $a_0 = 1, a_1 = 1$ (ב) $a_{n+1} = 5a_n - 4a_{n-1}$

כאשר $a_0 = -1, a_1 = 4$ (ג) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$

כאשר $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 7$ (ד) $a_{n+1} = 7a_{n-1} + 6a_{n-2}$

כאשר $a_0 = 1, a_1 = 4, a_2 = 11$ (ה) $a_{n+1} = 4a_n - 5a_{n-1} + 2a_{n-2}$

כאשר $a_1 = 19, a_0 = 14$ (ו) $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2} + 16n$

כאשר $a_0 = 1, a_1 = 9$ (ז) $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} - 3$

כאשר $a_0 = 1, a_1 = 9$ (ח) $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} - 3^n$

כאשר $a_0 = 1, a_1 = 10$ (ט) $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} - 2^n$

כאשר $a_0 = -1, a_1 = 7\frac{1}{2}$ (י) $a_n = 10a_{n-1} - 25a_{n-2} + 5^n$

כאשר $a_0 = 1, a_1 = 2$ (יא) $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2^n + n$

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il

כתב ופתר - טל פלדמן ©

שיעורים פרטיים לבוחדים ולקבוצות 054-7599493

(10) מצא נוסחת נסיגה ותנאי התחלה עבור הסידרה a_n המקיימת: $a_n = 2^{2n+1} - 3^n(n-1) + 1$.

(11) כתוב נוסחת נסיגה, a_n , למספר הסדרות באורך n בספרות 0,1,2 ללא 00 ו-12.

(12) איש ציבור נורמטיבי לוקח שוחד כל שנה בסכום 2 מיליון דולר, 4 מיליון דולר או 6 מיליון דולר. כדי לא למשוך תשומת לב הוא לא לוקח שנתיים ברצף שוחד על סך 6 מיליון דולר. נסמן ב a_n את מספר סדרות השוחד השונות שיכול לצבור איש ציבור בשירות נורמטיבי בן n שנים.

דוגמה: במשך 4 שנים ניתן לצבור את סדרת השוחד 2,2,2,2; את סדרת השוחד 2,4,2,6; את סדרת השוחד 4,2,2,6; ועוד כהנה וכהנה. שימי לב ששתי הסדרות האחרונות נספרות כשתי סדרות שוחד שונות. רשמי נוסחת נסיגה ותנאי התחלה ל a_n .

(13) לכל $n \in \mathbb{N}$ נסמן ע"י a_n את מספר המילים מעל $\{A, B, C, D, E\}$ שלא מכילות אף אחד מהרצפים AA, BA, CA . מצא נוסחה מפורשת עבור a_n .

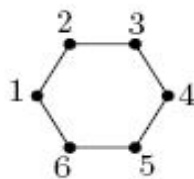
(14) יהי a_n מספר הסדרות באורך n , שאבריהן שייכים לקבוצה $\{1,2,3,\dots,8\}$ ומקיימות את התנאי

הבא: לא מופיעים בסדרה מספרים זוגיים זה בסמוך לזה.

(א) מצאו יחס נסיגה עבור a_n , רשמו את a_0, a_1 .

(ב) פתרו את יחס הנסיגה וקבלו ביטוי מפורש עבור a_n .

(ג) חשבו את a_2 מנוסחת הרקורסיה ומהביטוי המפורש, ובדקו שהתקבל אותו ערך.



(15) לקינוח שאלה קשה.

כמה טיולים באורך n המתחילים בקודקוד 1 ומסתיימים בקודקוד 1 יש בגרף

לדוגמה עבור $n = 2$ יש שני טיולים כאלה והם 1,2,1 ו-1,6,1

לדוגמה עבור $n = 4$ יש שישה טיולים כאלה והם

$(1,2,3,2,1), (1,2,1,2,1), (1,6,5,6,1), (1,6,1,6,1), (1,6,1,2,1), (1,2,1,6,1)$

תרגילים בנושא שובך היונים

- (1) תהי $A = \{1, 2, 3, \dots, 49\}$ הוכח כי לכל בחירה של קבוצה $B \subseteq A$ כך ש- $|B| = 26$ יהיו ב- B לפחות שני איברים שסכומם 49.
- (2) תהי A קבוצה של שישה מספרים מתוך $\{1, \dots, 11\}$ הוכח כי קיימות שתי תתי קבוצות של A שסכום אבריהן שווה.
- (3) מה הגודל המירבי של קבוצה של מספרים טבעיים שבה אין שני מספרים שסכומם או הפרשם מתחלק ב-3009? נמקו!!!
- (4) תהי A קבוצה של n מספרים טבעיים כלשהם. הוכח שקיימת קבוצה חלקית לא-ריקה של A , שסכום אבריה מתחלק ב- n .
- (5) הוכח כי בכל צביעה של המישור בשני צבעים כחול ואדום יש שתי נקודות שמרחקן, אחד והן צבועות באותו צבע.
- (6) יהי $n \in \mathbb{N}$ הוכח כי קיים $k \in \mathbb{N}$ כך שבמספר הטבעי $k \cdot n$ מופיעות הספרות 7 ו-0 בלבד.
- (7) הוכח כי מבין כל 12 מספרים זו ספרתיים יש שניים שהפרשם בעל שתי ספרות זהות.
- (8) הוכח כי מבין כל בחירת 26 נקודות בתוך משולש שווה צלעות שאורך צלעו הוא אחד יש שתי נקודות שהמרחק ביניהן קטן מ- $\frac{1}{5}$.
- (9) הוכח כי בכל בחירה של $n + 1$ מספרים מתוך הקבוצה $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ יש שני מספרים x, y כך ש-
 א. x, y זרים. (כלומר המחלק המשותף המקסימלי שלהם הוא 1).
 ב. x מתחלק ב- y ללא שארית.
 ג. הראה כי החסם הנ"ל הדוק, כלומר אפשר לבחור n מספרים מבלי שיתקיימו תנאי א' ו-ב'.
- (10) בוחרים 46 מספרים מתוך הקבוצה $\{1, 2, 3, \dots, 81\}$ הוכח כי יש שני מספרים שהפרשם הוא בדיוק 9.
- הוכח גם כי המספר הנ"ל הדוק. (כלומר מצא 45 מספרים מתוך $\{1, 2, 3, \dots, 81\}$ שאין בהם שניים שהפרשם הוא בדיוק 9).
- (11) תהי A קבוצה בת 20 מספרים שנבחרו במתוך הסדרה החשבונית $1, 4, 7, 10, \dots, 100$ הוכח כי יש שני מספרים שסכומם 104.
- (12) אנשים נפגשו במסיבה ולחצו ידיים. הוכח כי יש שני אנשים שלחצו בדיוק אותו מספר ידיים.
- (13) הוכח כי בכל צביעה של קשתות הגרף השלם K_6 בשני צבעים יש משולש מונוכרומטי.
- (14) הוכח כי בכל גרף יש שני קודקודים בעלי אותה דרגה.
- (15) לפוליטיקאי נותרו 50 ימים עד לבחירות. הוא מתכנן נאומי בחירות. לפחות אח ביום אך לא יותר מ-75 נאומים בס"ה. הוכח כי קיימת סדרת ימים שבהם הוא נואם בס"ה 24 מאומים.
- (16) יהי $n \in \mathbb{N}$ הוכח כי קיים $m \in \mathbb{N}$ כך ש- n מחלק את $2^m - 1$. הדרכה: התבונן ב- $1, 2^3 - 1, 2^2 - 1, 2^1 - 1, \dots, 2^{n+1} - 1$.